

Chaînes de Markov Incomplètement Spécifiées : analyse par comparaison stochastique et application à l'évaluation de performance des réseaux

Projet DIGITEO : MARINA & ANR MARMOTE

Farah AIT SALAHT

Laboratoire PRiSM
Université de Versailles St-Quentin en Yvelines (UVSQ)

3 octobre 2014



Membres du jury

Président : Véronique VEQUE, Pr., Université Paris-Sud 11
Rapporteurs : Patrice MOREAUX, Pr., LISTIC, Polytech Annecy-Chambéry, Univ. de Savoie
Gerardo RUBINO, Dir. de Recherche, à INRIA Rennes - IRISA
Directeurs de thèse : Jean-Michel FOURNEAU, Pr., UVSQ
Hind CASTEL-TALEB, Pr., TSP-Télécom SudParis
Nihal PEKERGIN, Pr., Université Paris-Est Créteil Val de Marne

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Motivations

- ▶ Analyse de performance de systèmes réels sur lesquels nous avons des mesures partielles
- ▶ Facteur d'incertitude
- ▶ Analyse exacte très difficile voire impossible à effectuer
- ▶ Aspects de l'incertitude :
 - Imprécision dans les probabilités de transition
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
- ▶ Notre objectif :
 - ▶ Apporter des solutions de modélisation pour les systèmes partiellement connus et résolution numérique
 - ▶ Fournir des encadrements sur les performances des systèmes étudiés

Problématique : imprécision

1. Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov

- ▶ Difficulté de déterminer tous les paramètres du modèle
- ▶ Impossibilité/coût élevé de déterminer précisément les probabilités de transition
- ▶ Information partielle sur l'espace d'état et/ou probabilités de transition
- ▶ Description par intervalles des probabilités de transition

2. Incertitude de mesure et bruit de quantification

- ▶ Traces de trafic réelles
- ▶ Mesures de données trop importantes
- ▶ Précision limitée des mesures
- ▶ Bruit de quantification

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

1. Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov

- ▶ Les éléments de la matrice sont définis par un intervalle
- ▶ Ensemble défini par deux matrices \mathbf{L} et \mathbf{U} , tel que $\mathbf{L} \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{U}$ (\leq : par élément)
- ▶ Matrices positives (non stochastiques)

Exemple

On considère la chaîne de Markov imprécise à 4 états dont les probabilités de transitions sont exprimées comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc} [0.2744, 0.3456] & [0.2765, 0.3477] & [0.3779, 0.4490] & 0 \\ [0.1024, 0.3067] & 0 & [0.2651, 0.7282] & [0.1430, 0.4282] \\ [0.3844, 0.5085] & [0.3844, 0.5152] & 0 & [0.0488, 0.1004] \\ [0.0248, 0.0544] & 0.5571 & [0.2229, 0.4885] & [0, 0.0003] \end{array} \right)$$

1. Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov

- ▶ Les éléments de la matrice sont définis par un intervalle
- ▶ Ensemble défini par deux matrices \mathbf{L} et \mathbf{U} , tel que $\mathbf{L} \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{U}$ (\leq : par élément)
- ▶ Matrices positives (non stochastiques)

Exemple

On considère la chaîne de Markov imprécise à 4 états dont les probabilités de transitions sont exprimées comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc} [\mathbf{0.2744}, 0.3456] & [0.2765, 0.3477] & [0.3779, 0.4490] & 0 \\ [\mathbf{0.1024}, 0.3067] & 0 & [0.2651, 0.7282] & [0.1430, 0.4282] \\ [\mathbf{0.3844}, 0.5085] & [0.3844, 0.5152] & 0 & [0.0488, 0.1004] \\ [\mathbf{0.0248}, 0.0544] & 0.5571 & [0.2229, 0.4885] & [0, 0.0003] \end{array} \right)$$

1. Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov

- ▶ Les éléments de la matrice sont définis par un intervalle
- ▶ Ensemble défini par deux matrices \mathbf{L} et \mathbf{U} , tel que $\mathbf{L} \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{U}$ (\leq : par élément)
- ▶ Matrices positives (non stochastiques)

Exemple

On considère la chaîne de Markov imprécise à 4 états dont les probabilités de transitions sont exprimées comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc} [0.2744, \mathbf{0.3456}] & [0.2765, 0.3477] & [0.3779, 0.4490] & 0 \\ [0.1024, \mathbf{0.3067}] & 0 & [0.2651, 0.7282] & [0.1430, 0.4282] \\ [0.3844, \mathbf{0.5085}] & [0.3844, 0.5152] & 0 & [0.0488, 0.1004] \\ [0.0248, \mathbf{0.0544}] & 0.5571 & [0.2229, 0.4885] & [0, 0.0003] \end{array} \right)$$

1. Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov

- ▶ Les éléments de la matrice sont définis par un intervalle
- ▶ Ensemble défini par deux matrices \mathbf{L} et \mathbf{U} , tel que $\mathbf{L} \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{U}$ (\leq : par élément)
- ▶ Matrices positives (non stochastiques)

Exemple

On considère la chaîne de Markov imprécise à 4 états dont les probabilités de transitions sont exprimées comme suit :

$$\left(\begin{array}{cccc} [0.2744, 0.3456] & [0.2765, 0.3477] & [0.3779, 0.4490] & 0 \\ [0.1024, 0.3067] & 0 & [0.2651, 0.7282] & [0.1430, 0.4282] \\ [0.3844, 0.5085] & [0.3844, 0.5152] & 0 & [0.0488, 0.1004] \\ [0.0248, 0.0544] & 0.5571 & [0.2229, 0.4885] & [0, 0.0003] \end{array} \right)$$

Question : *Est-ce qu'on peut dire quelque chose sur les probabilités stationnaires ?*

1. Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov

- ▶ Les éléments de la matrice sont définis par un intervalle
- ▶ Ensemble défini par deux matrices \mathbf{L} et \mathbf{U} , tel que $\mathbf{L} \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{U}$ (\leq : par élément)
- ▶ Matrices positives (non stochastiques)

Exemple

On considère la chaîne de Markov imprécise à 4 états dont les probabilités de transitions sont exprimées comme suit :

$$\begin{pmatrix} [0.2744, 0.3456] & [0.2765, 0.3477] & [0.3779, 0.4490] & 0 \\ [0.1024, 0.3067] & 0 & [0.2651, 0.7282] & [0.1430, 0.4282] \\ [0.3844, 0.5085] & [0.3844, 0.5152] & 0 & [0.0488, 0.1004] \\ [0.0248, 0.0544] & 0.5571 & [0.2229, 0.4885] & [0, 0.0003] \end{pmatrix}$$

Question : *Est-ce qu'on peut dire quelque chose sur les probabilités stationnaires ?* **OUI**

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - **Incertitude de mesure et bruit de quantification**
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

2. Incertitude de mesure et bruit de quantification

- ▶ Distributions empiriques avec un grand nombre de bins (plusieurs milliers)
- ▶ Équation de structure du modèle parfaitement connue (FIFO, Loynes, Max-Plus, ...)
- ▶ Effectuer des calculs numériques sur les distributions de probabilités

Inconvénients :

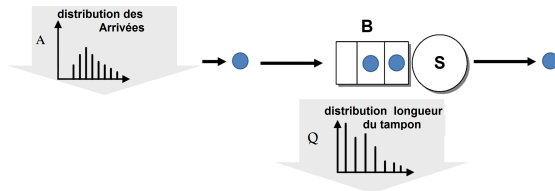
- ▶ Croissance très rapide du nombre de bins suite aux opérations numériques
- ▶ Calcul numérique très difficile voire impossible (complexité)

Exemples étudiés :

- ▶ Distribution de la durée d'exécution dans un graphe de tâches stochastique
- ▶ Distribution des délais d'attente dans une file FIFO
- ▶ Mesures de performance dans une file d'attente simple et dans les réseaux

2. Incertitude de mesure et bruit de quantification

Exemple : file d'attente à temps discret avec tampon finie, arrivée par groupe et service constante



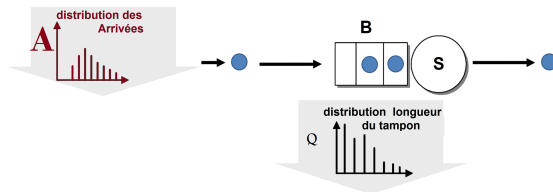
- ▶ Les arrivées ont lieu avant les services
- ▶ La longueur du tampon à l'instant k est :

$$Q(k) = \min(B, (Q(k-1) + A - S)^+), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

- ▶ Où A est la taille du groupe en entrée
- ▶ S est capacité de service et B représente la taille du tampon
- ▶ Chaîne de Markov en temps discret

2. Incertitude de mesure et bruit de quantification

Exemple : file d'attente à temps discret avec tampon finie, arrivée par groupe et service constante



- ▶ Les arrivées ont lieu avant les services
- ▶ La longueur du tampon à l'instant k est :

$$Q(k) = \min(\mathbf{B}, (Q(k-1) + \mathbf{A} - S)^+), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Résolution numérique très difficile (taille)

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Une méthodologie : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes

1. Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov

- ▶ Calculer des bornes par éléments sur la distribution de probabilité stationnaire
- ▶ Utiliser la comparaison par élément des matrices et des vecteurs (\leq)
- ▶ Faire un calcul de faible complexité
- ▶ Développer un algorithme itératif avec une amélioration des bornes à chaque itération
 - ▶ Fondé sur la théorie polyédrale de Courtois et un résultat de Muntz
 - ▶ Et sur un algorithme prouvé par J.M. Fourneau et A. Busic (NLA 2011)
 - ▶ Systèmes dynamiques (c.-à-d. non stochastique) reposant sur les séquences (max, +) ou (min, +)

Une méthodologie : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes

Contributions

- ▶ Nouveau schéma de calcul pour la distribution stationnaire d'un ensemble de DTMC
- ▶ Construction de nouvelles bornes par éléments prouvées sur le vecteur de distribution stationnaire d'une chaîne de Markov imprécise
- ▶ Construction de nouvelles bornes par éléments prouvées sur la MTTF d'une chaîne de Markov imprécise et absorbante

Publications :

2 conférences internationales avec comité de lecture et actes :

1. IEEE ISICIS' 12 : *27th International Symposium on Computer and Information Sciences.*
2. IEEE ISICIS' 13 : *28th International Symposium on Computer and Information Sciences*

Une méthodologie : les méthodes de comparaison et de bornes

2. Incertitude de mesure et bruit de quantification

- ▶ Simplification du modèle initial
- ▶ Définition de nouvelles bornes sur les distributions fondées sur l'ordre stochastique
- ▶ Réduire la taille des distributions
- ▶ Offrir un compromis entre la qualité des bornes et la complexité du calcul

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Motivation

- Analyser les performances d'un réseau sous des trafics généraux issus de traces réelles
 - ▶ **Problème :**
 - ▶ Distributions discrètes avec un nombre important de bins
 - ▶ Calcul de la distribution stationnaire est très difficile voire impossible
 - ▶ **Proposition :**
 - Appliquer la méthode de bornes stochastiques pour l'analyse de performance du réseau avec une représentation en histogramme du trafic**
 - Fournir des garanties sur les mesures de performances sous condition d'avoir des histogrammes corrects

Motivation

- ▶ Approche par histogramme sur les mesures du trafic
- ▶ Moins d'hypothèses sur les processus d'arrivées et de services
- ▶ Utilisation de la théorie de bornes stochastiques pour réduire la taille des distributions
 - ▶ Borne de la distribution exacte
 - ▶ Bornes sur les mesures de performance qui sont des récompenses positives
 - ▶ Meilleure que la méthode HBSP défini par Hernandez-Orallo, qui fournit une approximation
 - ▶ Définition d'encadrements stochastiques
 - ▶ Contrôle de la taille des distributions \implies Contrôle de la complexité
 - ▶ Compromis empirique entre la précision et la complexité

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - **Notre méthodologie**
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Notre méthodologie

- 1 Déterminer la distribution d'entrée à partir de trace de trafic réelle
- 2 Prouver un algorithme permettant de borner stochastiquement une distribution par une autre plus petite en taille
- 3 Trouver les équations structurelles sur les distributions
Exemple : longueur du tampon sous la discipline FIFO dans une file d'attente finie :
$$Q(k) = \min(B, (Q(k-1) + A - S)^+), \quad k \in \mathbb{N}$$
- 4 Montrer la **Monotonie Stochastique**. *Intuition* : si l'on augmente au sens stochastique la distribution des arrivées, alors on augmente les distributions de l'occupation du tampon, la distribution de départ et les délais au sens stochastique

Notre méthodologie

Exemple de trace de trafic réelle

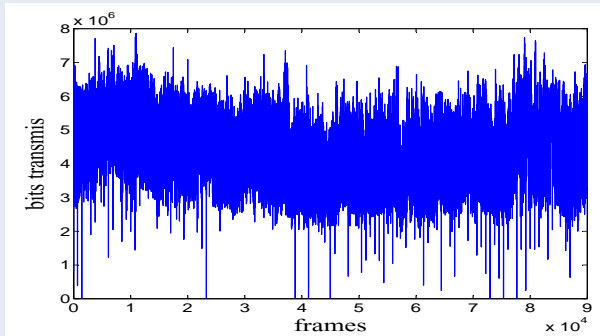


FIGURE : Trace du trafic MAWI correspondant à une heure de mesure de trafic IP, 9 janvier 2007 entre 12h et 13h (avec $T = 40$ ms)

Première étape

- ▶ Dériver une distribution discrète de la trace (distributions d'entrée)
- ▶ **Hypothèse principale** : stationnarité du processus
- ▶ Période d'échantillonnage (ici $T = 40$ ms, pour être conforme aux travaux existants d'Hernandez-Orallo)

Première étape

- ▶ Dériver une distribution discrète de la trace (distributions d'entrée)
- ▶ **Hypothèse principale** : stationnarité du processus
- ▶ Période d'échantillonnage (ici $T = 40$ ms, pour être conforme aux travaux existants d'Hernandez-Orallo)

Illustration sur la trace MAWI

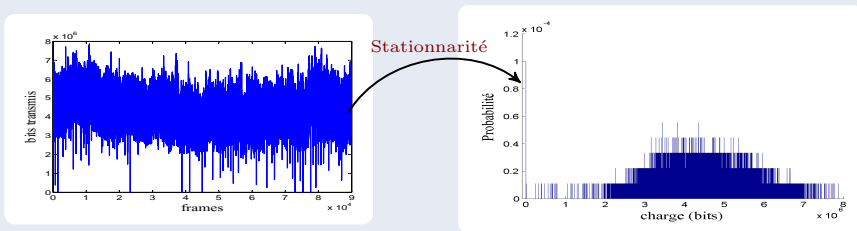


FIGURE : Trace de trafic MAWI (à gauche), représentation en histogramme (à droite). Le nombre de bins (états) est de 80511.

Deuxième étape

- ▶ La taille de la distribution du processus d'arrivée (ici, 80511 bins) a une influence directe sur la résolution numérique du modèle

L'idée : remplacer la distribution des arrivées avec N bins par une autre ayant moins de bins ($K \ll N$) et qui est stochastiquement plus grande ou plus petite

- ▶ d : une distribution de probabilité discrète définie sur l'espace d'état **totalemment ordonné** \mathcal{H} , $|\mathcal{H}| = N$, $d(i) > 0$ pour $i \in \mathcal{H}$;
- ▶ r : récompense positive croissante ; $R[d] = \sum r(i)d(i)$;
- ▶ **Calculer une distribution db définie sur \mathcal{F} avec K bins, $K \ll N$.**

db est la meilleure borne stochastique (inférieure ou supérieure) de d pour r .

Brève introduction sur l'ordre stochastique

- ▶ $\mathcal{G} = \{1, 2, \dots, n\}$ un espace d'état fini
- ▶ X, Y : distributions discrètes sur \mathcal{G}
- ▶ $p_X(i) = \text{prob}(X = i)$ et $p_Y(i) = \text{prob}(Y = i)$ pour $i \in \mathcal{G}$

Propriétés sur l'ordre stochastique \leq_{st}

- **Définition de l'ordre \leq_{st} :** $X \leq_{st} Y$ ssi $\sum_{k=i}^n p_X(k) \leq \sum_{k=i}^n p_Y(k)$, $\forall i$.

- **Comparaison de fonctions non décroissantes :**

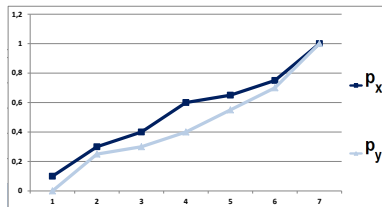
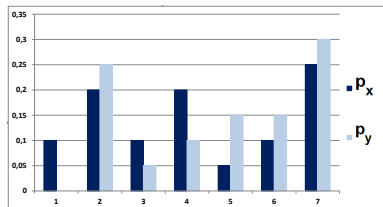
$$X \leq_{st} Y \iff \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$$

pour toute fonction non décroissante $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ à condition que les espérances existent.

- Soient F_X et F_Y leurs probabilités cumulées. Alors,

$$X \leq_{st} Y \iff F_X(a) \geq F_Y(a), \forall a \in \mathcal{G}$$

Brève introduction sur l'ordre stochastique



-pmfs des distributions X et Y-

-Leurs fonctions de répartition-

FIGURE : $\mathcal{G} = \{1, 2, \dots, 7\}$, $p_X = [0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.05, 0.1, 0.25]$ et
 $p_Y = [0, 0.25, 0.05, 0.1, 0.15, 0.15, 0.3]$.

Bornes stochastiques sur les histogrammes

- ▶ Hypothèse : ordre total sur l'espace \mathcal{H} , de taille N
- ▶ Nous avons une distribution \mathbf{d} et \mathbf{r} : fonction de récompense positive croissante, $R[\mathbf{d}] = \sum \mathbf{r}(i)\mathbf{d}(i)$
- ▶ Déterminer $\mathbf{d1}$ et $\mathbf{d2}$ tel que :
 - 1 $\mathbf{d2} \leq_{st} \mathbf{d} \leq_{st} \mathbf{d1}$,
 - 2 $\mathbf{d1}$ et $\mathbf{d2}$ ont exactement K bins (pas nécessairement les mêmes) ; $\mathbf{d1}$ a comme support \mathcal{H}^u et $\mathbf{d2}$ a comme support \mathcal{H}^l ,
 - 3 $\sum_{i \in \mathcal{H}} \mathbf{r}(i)\mathbf{d}(i) - \sum_{i \in \mathcal{H}^l} \mathbf{r}(i)\mathbf{d2}(i)$ est minimal pour les distributions bornes inférieures \mathbf{d} avec K bins,
 - 4 $\sum_{i \in \mathcal{H}^u} \mathbf{r}(i)\mathbf{d1}(i) - \sum_{i \in \mathcal{H}} \mathbf{r}(i)\mathbf{d}(i)$ est minimal pour les distributions bornes supérieures \mathbf{d} avec K bins.

Bornes optimales, programmation dynamique

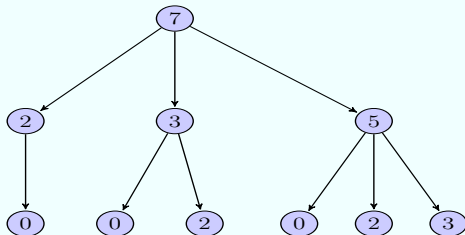
- ▶ Problème de théorie des graphes.
- ▶ On considère un graphe pondéré $G = (V, E)$ avec :
 - ▶ **Borne inférieure** : $w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(j) - \mathbf{r}(u))$
 - ▶ **Borne supérieure** : $w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(v) - \mathbf{r}(j))$
- ▶ **Calcul de la borne optimale** \equiv Déterminer le chemin de longueur K ($K \ll N$) de coût minimum dans le graphe G . Algorithme fondé sur la programmation dynamique avec une complexité : $O(N^2K)$.
- ▶ La masse de probabilités des nœuds supprimés est sommée avec
 - ▶ **Borne inférieure** : les prédécesseurs immédiats
 - ▶ **Borne supérieure** : les successeurs immédiats

Exemple : Borne supérieure optimale

\mathcal{A} une distribution discrète avec support $\{0, 2, 3, 5, 7\}$
et probabilités $[0.05, 0.3, 0.15, 0.2, 0.3]$.

r : fonction de récompense, $r(a_i) = a_i$, $R[\mathcal{A}] = \sum_{a_i \in \mathbf{A}} r(a_i) p_{\mathbf{A}}(i) = 4.15$.

► Calculer la borne optimale supérieure $\overline{\mathcal{A}}$ sur 3 bins tel que $R[\overline{\mathcal{A}}] - R[\mathcal{A}]$ est minimale.

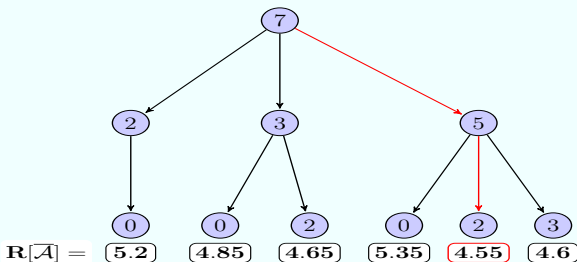


Exemple : Borne supérieure optimale

\mathcal{A} une distribution discrète avec support $\{0, 2, 3, 5, 7\}$
 et probabilités $[0.05, 0.3, 0.15, 0.2, 0.3]$.

r : fonction de récompense, $r(a_i) = a_i$, $R[\mathcal{A}] = \sum_{a_i \in \mathbf{A}} r(a_i) p_{\mathbf{A}}(i) = 4.15$.

► Calculer la borne optimale supérieure $\overline{\mathcal{A}}$ sur 3 bins tel que $R[\overline{\mathcal{A}}] - R[\mathcal{A}]$ est minimale.



Distribution bornante $[0.35, 0.35, 0.3]$ avec support $\{2, 5, 7\}$ et $R[\overline{\mathcal{A}}] = 4.55$.

Algorithmes de réduction des distributions discrètes

Autres algorithmes de réduction possibles

- ▶ Méthode HBSP (Hernandez-Orallo) : construit une approximation de la distribution plutôt qu'une borne
- ▶ Une approche heuristique divisant l'espace d'état \mathcal{H} en K sous ensembles de même taille et en calculant la somme des probabilités sur ces sous-ensembles (approche de Tancrez-Semal)
 - Résultats pas prouvés optimaux (contrairement à notre approche)

Algorithmes de réduction des distributions discrètes

Autres algorithmes de réduction possibles

- ▶ Méthode HBSP (Hernandez-Orallo) : construit une approximation de la distribution plutôt qu'une borne
- ▶ Une approche heuristique divisant l'espace d'état \mathcal{H} en K sous ensembles de même taille et en calculant la somme des probabilités sur ces sous-ensembles (approche de Tancrez-Semal)
 - Résultats pas prouvés optimaux (contrairement à notre approche)
- ▶ Une autre approche gloutonne enlevant les sommets les plus coûteux (récompense) un par un
 - Test d'optimalité intégré

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - **Analyse d'une file d'attente simple**
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Analyse d'une file d'attente simple

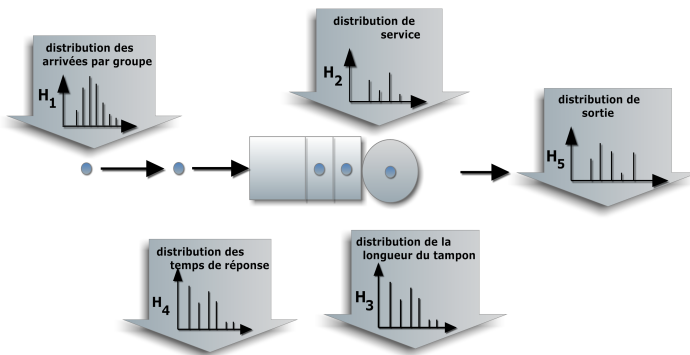


FIGURE : Analyse d'une file d'attente, H_1 et H_2 sont connus, H_3 , H_4 et H_5 sont numériquement calculables.

Résultats théoriques

- ▶ **Théorème** : La file d'attente finie avec des arrivées par groupe et service constant est stochastiquement monotone sous l'hypothèse Tail Drop
- ▶ Par conséquent, si l'on considère deux distributions H_1^ℓ et H_1^u définies sur K bins tels que $H_1^\ell \leq_{st} H_1 \leq_{st} H_1^u$, nous obtenons :
 - ▶ $H_3^\ell \leq_{st} H_3 \leq_{st} H_3^u$
 - ▶ $H_4^\ell \leq_{st} H_4 \leq_{st} H_4^u$
 - ▶ $H_5^\ell \leq_{st} H_5 \leq_{st} H_5^u$
- ▶ Également des bornes stochastiques supérieures et inférieures pour la distribution des pertes
- ▶ Mêmes types de résultats avec un service par groupe H_2
- ▶ $K \ll N$, typiquement $K = 20$ ou $K = 100$ et $N = 80511$.

Résultats théoriques

La monotonie :

- ▶ Théorèmes de comparaison
- ▶ Algorithme avec test de convergence prouvé pour le calcul de la distribution stationnaire

Test de convergence proposé

Supposons que la chaîne est ergodique et que l'état stationnaire est π .

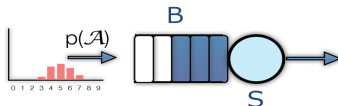
$$Q^l(k) \leq_{st} Q^l(k+1) \leq_{st} \pi \leq_{st} Q^u(k+1) \leq_{st} Q^u(k).$$

Si $\|Q^u(k+1) - Q^l(k+1)\|_\infty < \varepsilon$, la limite de $Q^l(k)$ et $Q^u(k)$ est π .

Exemple pour une file d'attente simple avec trace de trafic réelle en entrée

Exemple de file d'attente isolée avec :

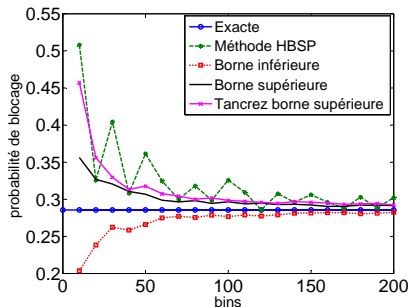
- ▶ Entrée issue de la trace de trafic MAWI
- ▶ Service constant



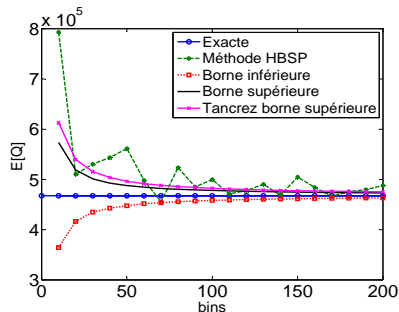
Objectif :

Comparer les différentes méthodes : résultat exact, méthode HBSP, approche de Tancrez-Semal et nos bornes stochastiques.

Mesures de performance d'une file d'attente simple



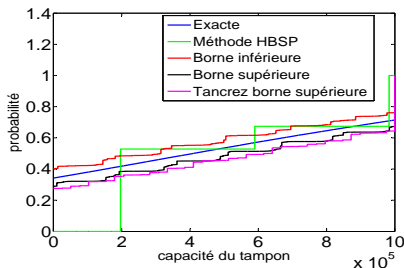
(a) Probabilités de blocage



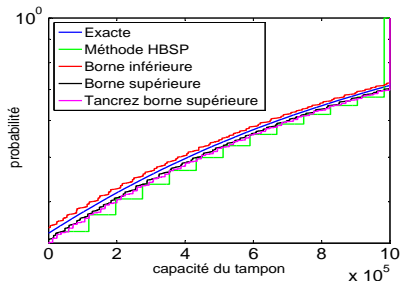
(b) Moyenne de la longueur du tampon

Mesures de performance d'une file d'attente simple

Fonction de répartition (cdf) de la longueur du tampon sous la trace MAWI



(c) bins=20



(d) bins=100

Temps de calcul pour $bins = 100$:

Exacte : 1897 s **HBSP** : 0.007 s, **Tancrez** : 0.012 s
Borne Inférieure : 0.35 s et **Borne Supérieure** : 0.33 s

Analyse d'une file d'attente simple

Autres cas étudiés

- ▶ Considération d'autres traces de trafic réelles (autres que la trace MAWI)
- ▶ Analyse d'une file d'attente simple avec service par groupe (décrit par une distribution discrète)
- ▶ Analyse de certains mécanismes de gestion active de files d'attente (preuves de monotonie)
- ▶ Preuve de monotonie des éléments de routage dans le réseau (élément de division : split et élément de fusion : merge)
- ▶ Considération de processus d'arrivée non-stationnaire (SBBP : *Switched Batch Bernoulli Process*)

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Analyse des réseaux de files d'attente

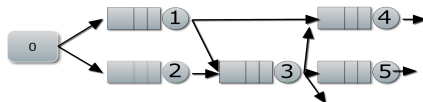


FIGURE : Réseau de files d'attente Feed-Forward.

Approches de résolution :

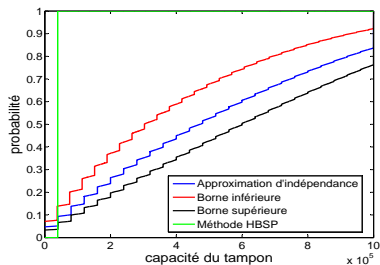
- 1 Approche par décomposition pour les réseaux feed-forward
- 2 Approche de bornes sur les QoS de réseaux de files d'attente en tandem (développée durant la thèse)

1. Encadrements de l'approximation de décomposition des réseaux feed-forward

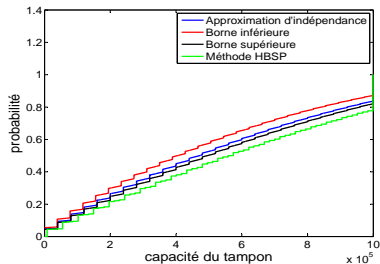
- ▶ Réseaux orientés acycliques (DAG)
- ▶ Hypothèse : indépendance (approximation)
- ▶ Chaque file est analysée séparément
- ▶ Recomposition des résultats pour calculer les performances du réseau
- ▶ Approximations des indices de performance du réseau
- ▶ **Notre contribution** : *Encadrements de l'approximation de décomposition*
 - ▶ Application de notre méthode de bornes stochastiques sur les distributions d'entrées et/ou de services
 - ▶ Monotonie \implies Encadrements à chaque étape intermédiaire
 - ▶ Encadrements sur les approximations des indices de performance
 - ▶ Plus rapide pour à peu près la même précision

Exemple : réseau de trois files d'attente en tandem

► Méthode de décomposition



bins=100



bins=500

Distribution de probabilités cumulée de la longueur du tampon de la file 3.

Temps de calcul pour $bins = 100$:

Décomposition : 21868 s HBSP : 0.13 s,

Borne Inférieure : 2.94 s Borne Supérieure : 2.89 s

2. Bornes sur les mesures exactes des réseaux de files d'attente en tandem

- ▶ Réseau de files d'attente en tandem

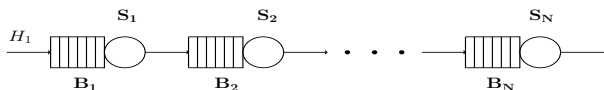


FIGURE : Réseau en tandem composé de N files d'attente.

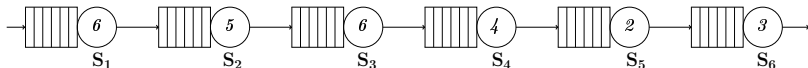
- ▶ Apporter des modifications sur le réseau initial
- ▶ Préserver les propriétés d'ordre stochastique
- ▶ Bornes sur les indices de performances exacts du réseau

Modifications apportées au réseau initial de files d'attente en tandem

- ▶ Définition des *Bottlenecks* locaux et du *Bottleneck* global
 - File i est *Bottleneck local* si $\forall \text{ file } j < i, S_j > S_i$
 - File i est *Bottleneck global* si $\forall j > 1, j \neq i : S_j > S_i$

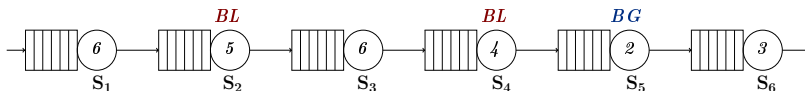
Modifications apportées au réseau initial de files d'attente en tandem

- ▶ Définition des *Bottlenecks* locaux et du *Bottleneck* global
 - File i est *Bottleneck local* si \forall file $j < i, S_j > S_i$
 - File i est *Bottleneck global* si $\forall j > 1, j \neq i : S_j > S_i$
- ▶ Exemple de positions des *bottlenecks* dans un réseau en tandem



Modifications apportées au réseau initial de files d'attente en tandem

- ▶ Définition des *Bottlenecks* locaux et du *Bottleneck* global
 - File i est *Bottleneck local* si \forall file $j < i, S_j > S_i$
 - File i est *Bottleneck global* si $\forall j > 1, j \neq i : S_j > S_i$
- ▶ Exemple de positions des *bottlenecks* dans un réseau en tandem :

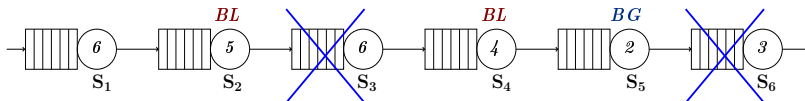


Modifications apportées au réseau initial de files d'attente en tandem

► Définition des *Bottlenecks* locaux et du *Bottleneck* global

- File i est *Bottleneck local* si \forall file $j < i, S_j > S_i$
- File i est *Bottleneck global* si $\forall j > 1, j \neq i : S_j > S_i$

► Exemple de positions des *bottlenecks* dans un réseau en tandem :

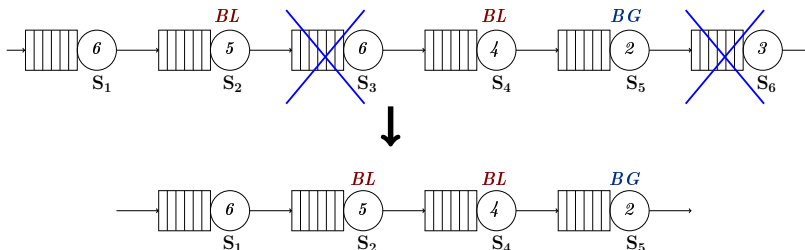


Modifications apportées au réseau initial de files d'attente en tandem

► Définition des *Bottlenecks* locaux et du *Bottleneck* global

- File i est *Bottleneck local* si \forall file $j < i, S_j > S_i$
- File i est *Bottleneck global* si $\forall j > 1, j \neq i : S_j > S_i$

► Exemple de positions des *bottlenecks* dans un réseau en tandem :



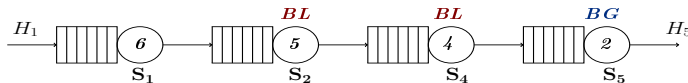
- Réseau réduit -

Méthodes de résolution du réseau réduit

- ▶ Quatre approches pour construire des bornes (prouvées) sur les mesures de performance exactes
 - 1 Approche 1** : Bornes stochastiques supérieures sur les mesures de performance de la file i : nombre de données en sortie, les pertes et les délais (*tampon infini pour $j < i$ + interchangeabilité*)
 - 2 Approche 2** : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai de traversé du réseau (*tampon infini + interchangeabilité*)
 - 3 Approche 3** : Bornes stochastiques inférieures sur la distribution en sortie, les pertes et les délais de la file i (*enlever les tampons pour $j < i$*)
 - 4 Approche 4** : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie, les pertes et les délais pour la file i (*serveur infini pour $j < i$*)

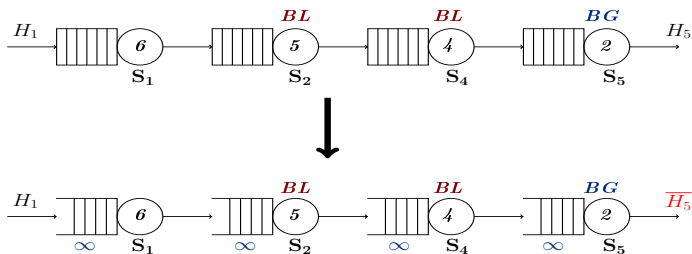
Approche 2 : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai dans le réseau

1. Poser tous les tampons des files du réseau à l'infini



Approche 2 : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai dans le réseau

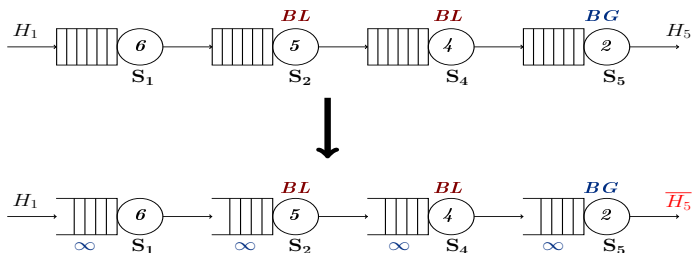
1. Poser tous les tampons des files du réseau à l'infini



- ▶ Borne stochastique supérieure de la distribution en sortie H_5
- ▶ Borne stochastique supérieure sur le délai de vie dans le réseau

Approche 2 : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai dans le réseau

1. Poser tous les tampons des files du réseau à l'infini



- ▶ Borne stochastique supérieure de la distribution en sortie H_5
- ▶ Borne stochastique supérieure sur le délai de vie dans le réseau

2. Utiliser le théorème d'interchangeabilité de Friedman

Théorème d'interchangeabilité de Friedman

Théorème d'interchangeabilité de Friedman

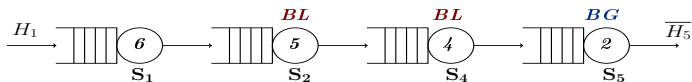
Théorème d'interchangeabilité de Friedman

Théorème d'interchangeabilité de Friedman

- ▶ Distribution de sortie (H_5) est identique dans les deux réseaux
- ▶ Idem pour le délai de traversée

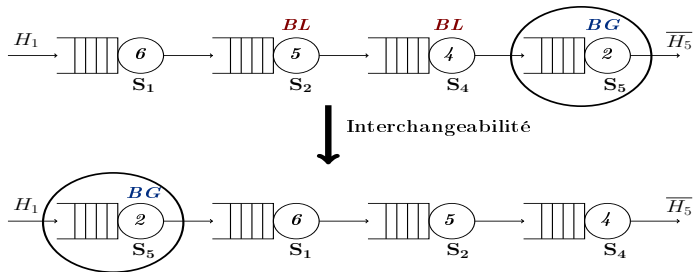
Approche 2 : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai dans le réseau

2. Théorème d'interchangeabilité : mettre le *Bottleneck* global en tête du réseau



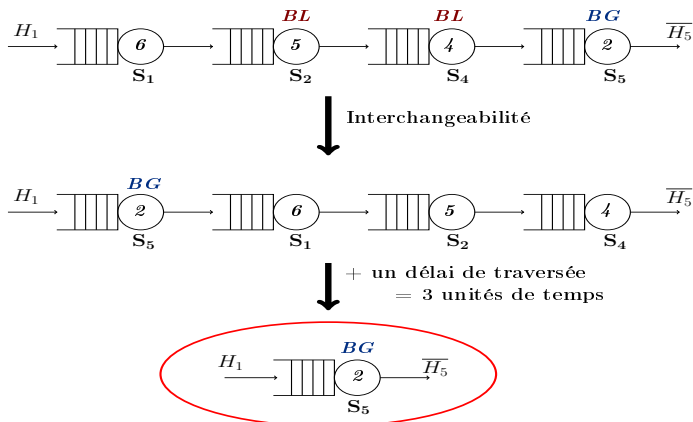
Approche 2 : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai dans le réseau

2. Théorème d'interchangeabilité : mettre le *Bottleneck* global en tête de réseau



Approche 2 : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai dans le réseau

2. Théorème d'interchangeabilité : mettre le *Bottleneck* global en tête de réseau



Approche 2 : Bornes stochastiques supérieures sur la distribution de sortie et le délai dans le réseau

3. Analyse d'une file d'attente simple (*Bottleneck* global)
 - ▶ Utilisation de notre méthode de bornes stochastiques (borne stochastique supérieure) sur la distribution d'entrée (H_1)
 - ▶ Obtention de bornes stochastiques supérieures sur la distribution exacte de sortie et la distribution exacte de délai de traversée dans le réseau

Sommaire

- 1 Contexte et problématique
- 2 Problèmes d'imprécision dans les modèles
 - Probabilités de transition imprécises dans les chaînes de Markov
 - Incertitude de mesure et bruit de quantification
 - Une méthodologie pour les deux problèmes : les méthodes de comparaison pour le calcul de bornes
- 3 Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux
 - Motivation
 - Notre méthodologie
 - Analyse d'une file d'attente simple
 - Analyse des réseaux de files d'attente
- 4 Conclusion et perspectives

Conclusion

- ▶ Apporter de nouvelles solutions de modélisation et de résolution numérique reposant sur les techniques de bornes
- ▶ Analyse de DTMCs partiellement spécifiées : nouvelles bornes par éléments sur la distribution stationnaire
- ▶ Analyse de DTMCs absorbantes et partiellement spécifiées : bornes par éléments sur la MTTF (*Mean Time To Failure*)
- ▶ Nouvelles bornes stochastiques sur les distributions discrètes avec réduction de taille : définition d'un algorithme optimal
- ▶ Applications :
 - ▶ Fiabilité et à l'analyse des graphes PERT stochastiques
 - ▶ Évaluation de performance de files d'attente et réseaux informatiques
 - ▶ Bornes sur les performances sont très pertinentes pour le dimensionnement de files d'attente

Perspectives

- ▶ DTMCs partiellement spécifiées
 - ▶ Serait-il possible d'utiliser la matrice \mathbf{U} pour calculer des bornes sur la distribution stationnaire
- ▶ Approche par bornes stochastiques et histogrammes
 - ▶ Analyse de files d'attente
 - ▶ Déterminer des encadrements sur les distributions transitoires
 - ▶ Considérer plusieurs classes de clients avec priorité de ressource
 - ▶ Effectuer une étude plus approfondie en considérant des flux non stationnaires
 - ▶ Considérer des topologies de réseaux plus générales
 - ▶ Dimensionnement de réseaux dans les cloud computing
 - ▶ Applicable dans le cas où l'équation structurelle sur les variables aléatoires est connue
 - ⇒ peut être utilisée avec n'importe quelle entrée de données importantes (taille)
- ▶ Extension à d'autres ordres

Publications

Problématique 1 :

- ▶ **Conférences internationales avec comité de lecture et actes :**
 1. **ISCIS'12** : 27th International Symposium on Computer and Information Sciences.
 2. **ISCIS'13** : 28th International Symposium on Computer and Information Sciences

Problématique 2 :

- ▶ **Soumission journal**
 3. **J-DEDS** : Discrete Event Dynamic Systems.
- ▶ **Conférences internationales avec comité de lecture et actes :**
 4. **WODES'12** : 11th International Workshop on Discrete Event Systems.
 5. **EPEW'13** : 10th European Workshop on Performance Engineering.
 7. **HPPCC'13** : 15th IEEE International Conference on High Performance Computing and Communications.
 8. **VeCoS'13** : 7th International Workshop on Verification and Evaluation of Computer and Communication Systems.
- ▶ **Conférence nationale avec comité de lecture et acte :**
 6. **MSR'13** : Modélisation des systèmes réactifs.
- ▶ **Résumés**
 9. **ROADEF'14** : 15ème congrès annuel de la Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision.
 10. **AEP'14** : 10ième Atelier en Évaluation de Performances.