

Recherche Opérationnelle

TD1 : Algorithmique de graphes

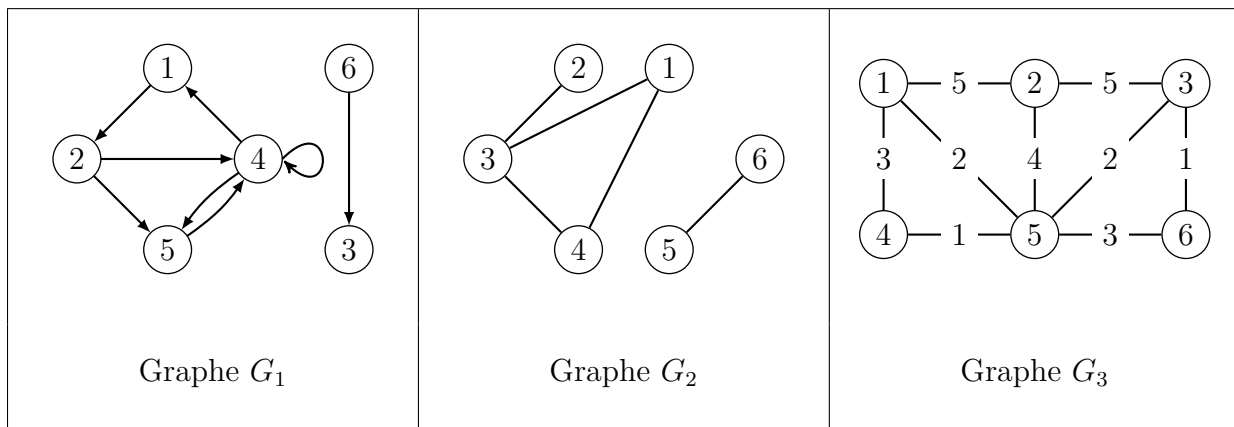
Responsable du cours : Emmanuel Hyon et François Delbot maîtres de conférences

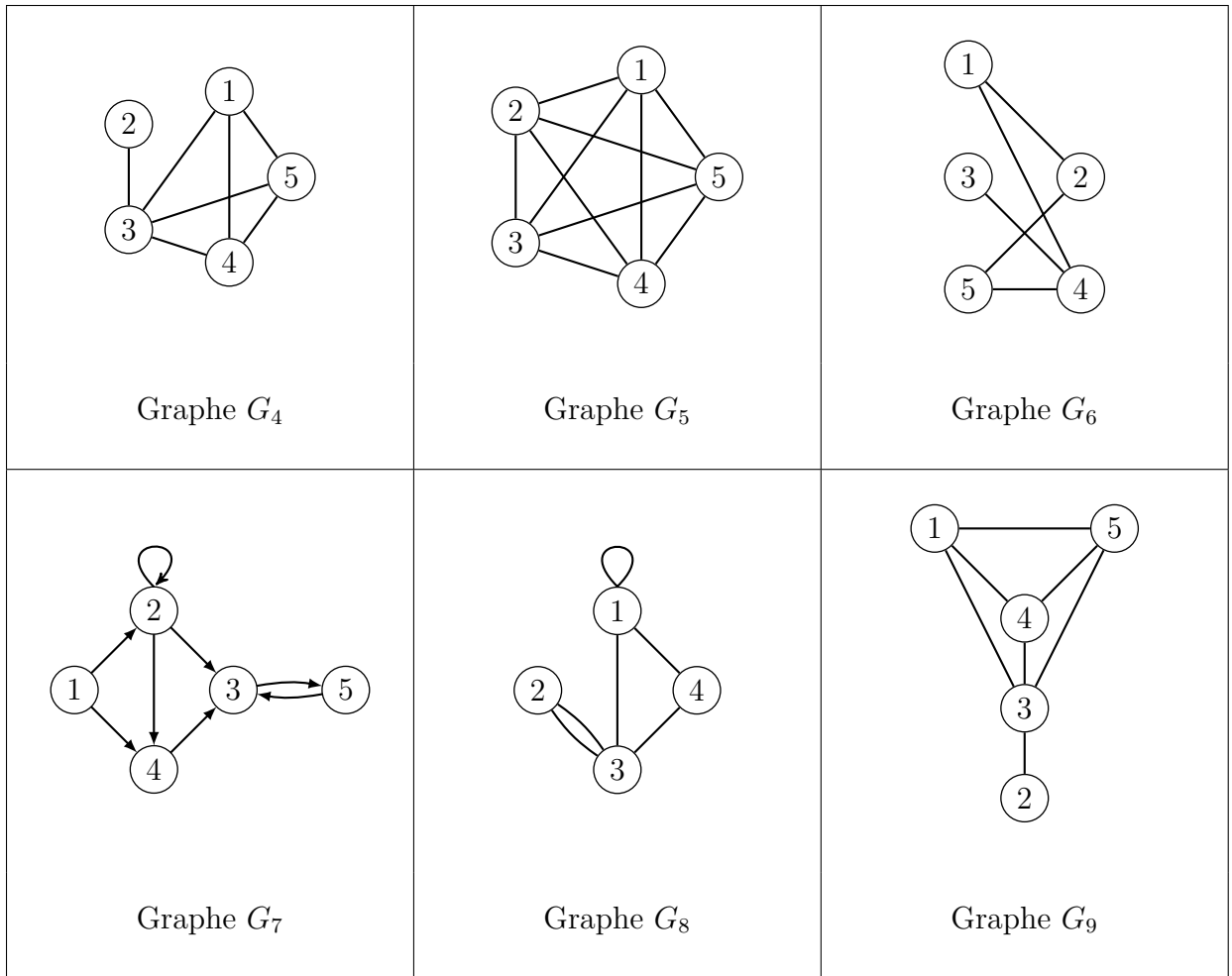
Chargés de TD : Lise Rodier et Farah Ait Salaht

Exercice 1

Pour chacun des graphes suivants :

- Déterminer si le graphe est orienté ou non. On notera $G = (V, E)$ un graphe non-orienté et $G = (V, A)$ un graphe orienté.
- Déterminer si le graphe contient des boucles.
- Déterminer si le graphe est un multi-graphe ou un graphe simple.
- Donner le nombre de sommets $|V|$.
- Donner les liste des arêtes E , ou arcs A . On notera (i, j) un arc entre les sommets i et j et $\{i, j\}$ une arête entre i et j .
- Pour chaque sommet v , donner son degré $d(v)$. Dans le cas d'un graphe orienté, donner à la fois son degré entrant $d^+(v)$ et son degré sortant $d^-(v)$.
- Déterminer si le graphe est connexe ou non.





Exercice 2

Pour chaque graphe, vous donnerez sa représentation graphique, son nombre de sommets et son nombre d'arêtes.

<p style="text-align: center;">Graphe G_1 :</p> $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$	<p style="text-align: center;">Graphe G_2 :</p> $V = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ $E = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$	<p style="text-align: center;">Graphe G_3 :</p> $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$
--	---	--

Exercice 3

On considère le graphe orienté $G = (V, A)$ tel que

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$$

1. Donner la représentation graphique de $G = (V, A)$.
2. Pour chaque sommet, donner son degré entrant ainsi que son degré sortant.
3. Donner la liste des prédécesseurs du sommet 4 ainsi que la liste des successeurs du sommet 2.

Exercice 4

Dessiner un graphe non-orienté complet à 4 sommets.

1. Quel est le degré des sommets de ce graphe ?
2. Combien d'arêtes possède-t-il ?

Généralisez ces résultats à un graphe non-orienté complet ayant n sommets.

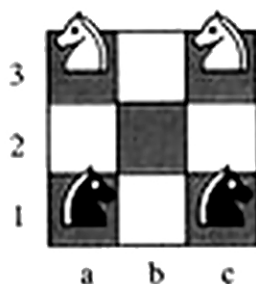
Exercice 5

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non-orienté. On note $d(v)$ le degré d'un sommet $v \in V$. Montrer que :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Exercice 6

Sur un échiquier 3x3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3. Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.



Exercice 7

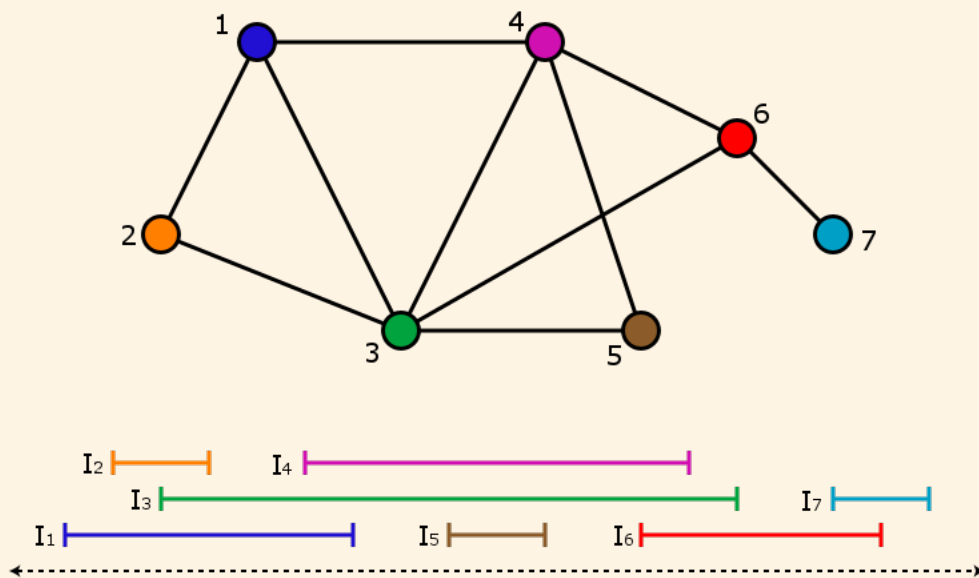
Au cours d'une soirée, les convives se serrent les mains les uns les autres (jamais plusieurs fois avec la même personne). Chacun se souvient du nombre de mains qu'il a serrées.

1. Montrer qu'il y a au moins 2 personnes ayant serré le même nombre de mains.
2. Montrer que le nombre total de mains serrées est pair.
3. En déduire que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 8

Graphe d'intervalle :

Un **graphe d'intervalle** est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles de la droite réelle. Chaque sommet du graphe d'intervalle représente un intervalle de l'ensemble, et une arête relie deux sommets lorsque les deux intervalles correspondants s'intersectent.



Soient $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ des intervalles.

Le graphe d'intervalle correspondant est $G = (V, E)$ où :

- l'ensemble des sommets est $V = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$
- il y a une arête entre deux sommets i et j , avec $i \neq j$ si et seulement si $\{i, j\} \in E \iff I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

Cet exercice est inspiré de la nouvelle de Claude Berge « Qui a tué le Duc de Densmore »

» (Bibliothèque Oulipienne numéro 67, 1994, Réédition Castor Astral, 2000). Dans cette nouvelle policière, le lecteur peut découvrir le meurtrier grâce au théorème suivant sur les graphes d'intervalle.

Théorème (Gilmore et Hoffman)

Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si il est **triangulé**, c'est-à-dire que tout cycle de longueur > 3 admet une corde.

Si, dans un graphe, deux sommets d'un cycle sont reliés par une arête qui n'appartient pas au cycle, cette arête est appelée corde du cycle.

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans.

À l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

- **Holmes** : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !
- **Watson** : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.
- **Holmes** : Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?
- **Watson** : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :
 - Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.
 - Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.
 - Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.
 - Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.
 - Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.
 - Georgia a rencontré Ann et Helen.
 - Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.

Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes !

C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :

- **Holmes** : Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine d'une façon unique l'assassin.

Qui est l'assassin ?

Exercice 9

Suite graphique :

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers (d_1, d_2, \dots, d_n) est dite graphique s'il existe un graphe simple, sans boucle et non-orienté à n sommets $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dont les degrés des sommets correspondent à cette suite, c'est-à-dire que pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ le sommets v_i est de degré d_i .

Par exemple, un triangle correspond à la suite $(2,2,2)$. Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

1. $(3,3,2,1,1)$
2. $(3,3,1,1)$
3. $(3,3,2,2)$
4. $(4,2,1,1,1,1)$
5. $(5,3,2,1,1,1)$
6. $(5,4,3,1,1,1,1)$

Trouver deux graphes correspondant à la suite $(3,2,2,2,1)$.

Montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ est graphique, alors $\sum_{i=1}^n d(i)$ est pair.