2015-2016

# Recherche Opérationnelle

**TD2 :** Algorithmique de graphes

**Responsable du cours :** Emmanuel Hyon et François Delbot maîtres de conférences

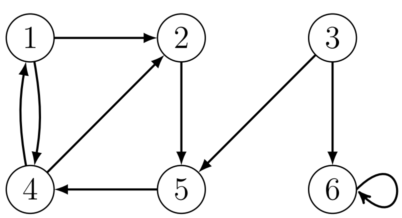
**Chargés de TD :** Lise Rodier et Farah Ait Salaht

## Exercice 1

**Chemins et cycles élémentaires**

Un chemin ou un cycle est dit **élémentaire** s'il ne passe qu'une et une seule fois par le même sommet.

Considérons le graphe orienté suivant :




Pour ce graphe, donner :

1. Un chemin élémentaire.
2. Un chemin non-élémentaire.
3. Un circuit élémentaire.
4. Un circuit non-élémentaire.

## Exercice 2

**Longueur maximum et maximale d'un chemin élémentaire**

Un chemin élémentaire d'un graphe $G$ est de longueur maximum s'il n'existe aucun autre chemin dans $G$ de longueur supérieure. Un chemin élémentaire sera dit maximal s'il est impossible de rajouter une arête à ce chemin sans former un cycle.

1. Dans un graphe connexe, montrer que deux chemins élémentaires de longueur maximum ont au moins un sommet en commun.
2. Est-ce toujours le cas pour un graphe non connexe ?

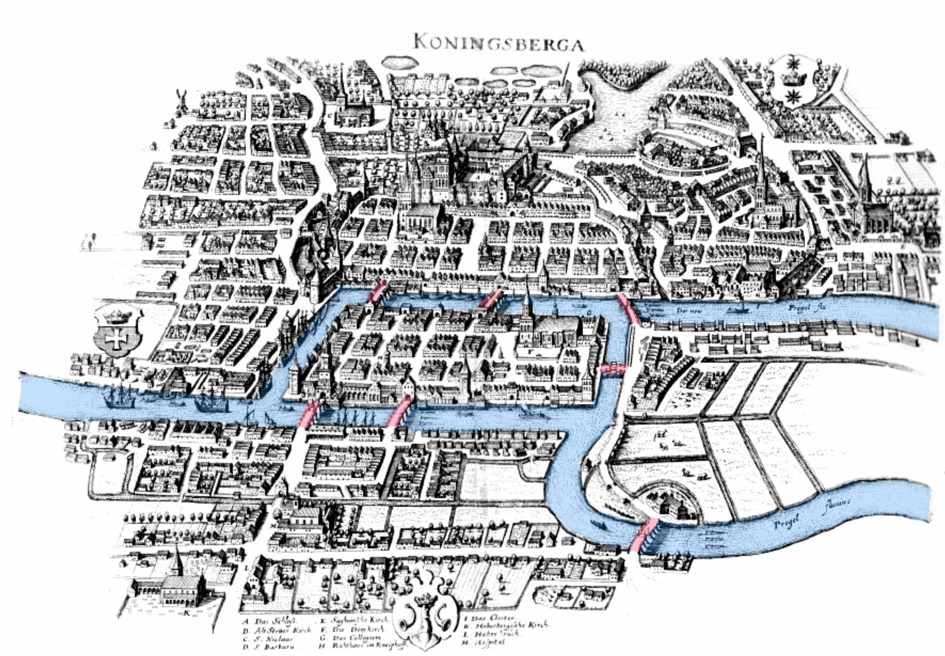
# Exercice 3

**Chaîne et cycles eulériens**

On appelle **cycle eulérien** d'un graphe $G$ un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de $G$. Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un cycle eulérien.
On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe $G$ une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de $G$. Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi-eulérien.

Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Cet exercice est un des problèmes fondateurs de la théorie des graphes, proposé par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1736. En 1652, la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) possède sept ponts enjambant la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof.




Au cours d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville une et une seule fois ?

# Exercice 4

**Chaîne et cycles hamiltoniens**

On appelle **cycle hamiltonien** d'un graphe $G$ un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de $G$. Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien.

On appelle **chaîne hamiltonienne** d'un graphe $G$ une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est **semi-hamiltonien**.

Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-)hamiltoniens. On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

— un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien.

— si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien.

— les graphes complets $K_n$ sont hamiltoniens.

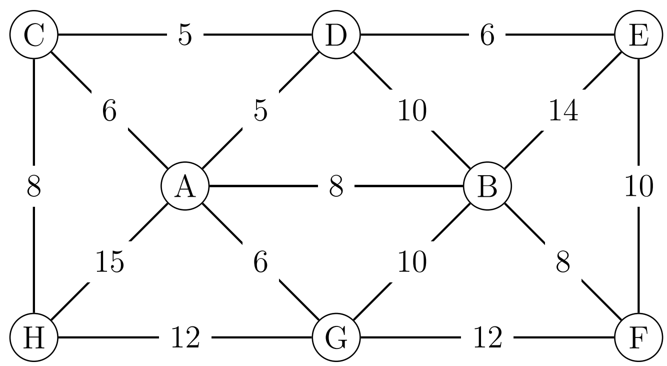
Dessinez un graphe d'ordre au moins 5 qui est :

1. hamiltonien et eulérien
2. hamiltonien et non eulérien
3. non hamiltonien et eulérien
4. non hamiltonien et non eulérien.

# Exercice 5

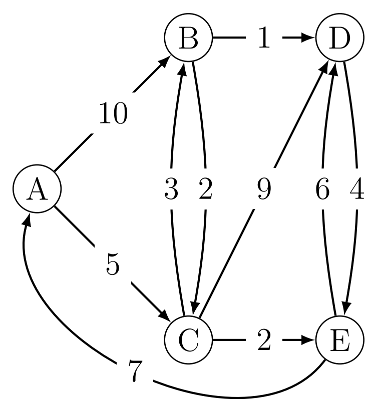
Le graphe suivant $G = (V, E, w)$ représente un réseau autoroutier, où les sommets sont des villes et deux villes sont reliées s'il existe une autoroute entre ces deux villes. Les pondérations $w$ représentent le coût pour se rendre d'une ville à une autre.

1. Calculez les itinéraires les plus économiques à partir de la ville A. Vous utiliserez pour cela l'algorithme de Dijkstra. Détaillez chaque étape.
2. Dessinez le graphe partiel correspondant aux plus courts chemins.



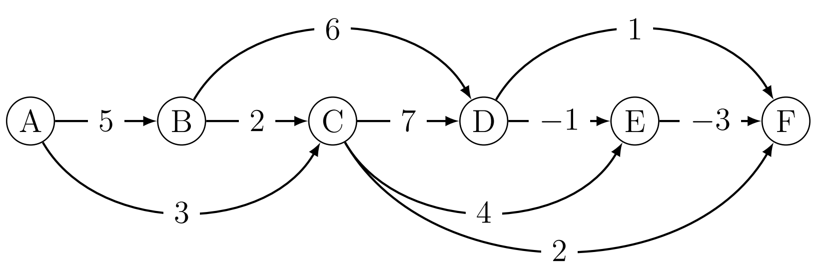

## Exercice 6

Même question que pour l'exercice précédent en utilisant le graphe suivant :




## Exercice 7

Appliquez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe suivant :




Que constatez vous ?