2015-2016

Recherche Opérationnelle

TD5 : Programmation linéaire

Responsable du cours : Emmanuel Hyon et François Delbot maîtres de conférences

Chargés de TD : Lise Rodier et Farah Ait Salaht

Exercice 1

Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2. La fabrication de ces produits nécessite du temps de travail (de la main d'œuvre), du temps-machine et de la matière première. Les coefficients techniques de production ainsi que les prix de vente par unité de produit sont fournis dans le tableau suivant :

	P_1	P_2
Heures de travail nécessaires à la fabrication d'une unité de produit	0,75h	0,5h
Temps-machine nécessaire à la fabrication d'une unité de produit	1,5h	0,8 h
Quantité de matière première nécessaires à la fabrication d'une unité de produit	2 unités	1 unité
Prix de vente d'une unité de produit (exprimé en unité monétaire u.m.)	15	8

Chaque semaine 400 unités de matière première au plus peuvent être achetées au prix de 1,5 u.m. par unité.
L'entreprise emploie 4 personnes qui travaillent chacune 35 heures par semaine. Ces personnes peuvent effectuer des heures supplémentaires qui sont payées 6 unités monétaires l'heure.
Chaque semaine la disponibilité en temps machine est de 320 h.

En absence de publicité, la demande hebdomadaire du produit P_1 serait de 50 unités, celle de P_2 de 60 unités ; mais on peut réaliser de la publicité pour développer les ventes : chaque unité monétaire dépensée en publicité sur P_1 (respectivement sur P_2) augmente la demande hebdomadaire de P_1 (respectivement P_2) de 10 unités (respectivement 15 unités). Les frais de publicité ne doivent pas dépasser 100 unités par semaine.

Les quantités de P_1 et P_2 fabriquées doivent rester inférieures ou égales à la demande (compte tenu de la publicité).

On définit les 6 variables suivantes :
- X_1 : nombre d'unités du produit P_1 fabriquées par semaine
- X_2 : nombre d'unités du produit P_2 fabriquées par semaine
- HS : nombre total d'heures supplémentaires effectuées par semaine
- MP : nombre d'unités de matière première achetées par semaine
- PUB_1 : nombre d'unités monétaires dépensées en publicité sur P_1
- PUB_2 : nombre d'unités monétaires dépensées en publicité sur P_2

L'entreprise désire fixer la valeur de chacune de ces variables de manière à maximiser son bénéfice :

$$Bénéfice = Chiffre\ de\ vente - Somme\ des\ coûts\ des\ variables$$

Le salaire (coût des heures normales) des 4 personnes est un coût fixe pour l'entreprise.

▶ **Question :** Modéliser le problème par un programme linéaire, l'objectif de l'entreprise étant de maximiser son bénéfice.

Exercice 2

Un fabriquant désire produire 100 kg d'une préparation de base pour crème glacée. Cette préparation doit contenir 21,5 kg de matière grasse, 21 kg de sucre, 1,2 kg d'œuf et 56,3 kg d'eau.
Les ingrédients dont il dispose figurent en tête de colonne du tableau ci-dessous, les constituants figurent en ligne. Ce tableau précise pour chaque ingrédient le pourcentage (en poids) en matière grasse, sucre, œuf et eau ainsi que son coût au kg.

	Ingrédients					
Constituants	Crème	Jaune d'œuf	Lait entier en poudre	Jaune d'œuf surgelé et sucré	Sirop de sucre de canne	Eau
Matière grasse	40	50	12	30		
Sucre				14	70	
Oeuf		40		40		
Eau	60	10	88	16	30	100
Coût au kg	3	4	1	2	0,80	0

▶ **Question :** Le fabricant désire déterminer la composition du mélange de coût minimal. Écrire le programme linéaire correspondant à ce problème.

Exercice 3

Trois types de poudres, A, B et C, servant à propulser une fusée doivent être mélangés pour fournir un carburant répondant aux spécifications suivantes :

- Puissance propulsive $\geq 4,2$
- Facteur corrosif $\leq 6,4$
- Poids (kg)/$dm^3 \leq 8$

Le tableau suivant donne ces spécifications pour 1 dm^3 de chacun des types de poudre ainsi que leur coût.

	A	B	C
Puissance propulsive	10	5	2
Facteur corrosif	10	4	6
Poids (kg)	6	10	8
Coût	10	5	8

▶ **Question 1 :** On a besoin de 60 dm^3 de poudre pour la fusée. Quel est le coût minimal du carburant demandé ?
▶ **Question 2 :** Déduire de ces données un problème de programmation linéaire et l'exprimer sous forme standard.

Exercice 3

▶ **Question 1 :** Mettre les programmes suivants sous forme standard.
▶ **Question 2 :** Même question en remplaçant *min* par *max* et inversement.

1. $$(PL_1)\left\{\begin{array}{llcllll} \max & 6x_1 & + & 4x_2 & & & \\ s.c. & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 & (1) \\ & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \geq & 1 & (2) \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 12 & (3) \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & (4) \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

2. $$(PL_2)\left\{\begin{array}{llcllll} \max & 5x_1 & + & 8x_2 & & & \\ s.c. & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (1) \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0 & (2) \\ & -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 1 & (3) \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

3. $(PL_3)\left\{\begin{array}{lllllllllll} \min & 3x_1 & - & x_2 & & & & & & & \\ s.c. & -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & -3 & (1) \\ & & & 7x_2 & & & + & x_4 & = & 5 & (2) \\ & & & & & x_3 & + & x_4 & \leq & 2 & (3) \\ & x_2 & \geq & -1 & & & & & & & \\ & x_3 & \leq & 5 & & & & & & & \\ & x_4 & \geq & -2 & & & & & & & \\ & x_2 & \leq & 2 & & & & & & & \end{array}\right.$

Exercice 5

Un brasseur doit décider de son plan de fabrication de bière. Il peut fabriquer de la bière blonde (prix de vente : 15 euros par UV) et de la bière brune (prix de vente : 25 euros par UV).

Pour cela, 3 ingrédients sont à disposition, présents en quantités différentes dans les deux bières : Maïs, Houblon et Malt. Les quantités requises (par UV) sont les suivantes :

1. Bière blonde : 2.5 kg de maïs, 125 g de houblon, 17.5 kg de malt
2. Bière brune : 7.5 kg de maïs, 125 g de houblon, 10 kg de malt

Le brasseur dispose, après achat, des quantités de matières premières suivantes :
– 240 kg de maïs
– 5 kg de houblon
– 595 kg de malt

▶ **Question 1 :** Le brasseur souhaite maximiser son bénéfice. Utilisez la méthode graphique pour trouver quelle quantité de chaque bière le brasseur doit produire.
▶ **Question 2 :** Même question si le prix de la bière blonde et brune est de 20 euros ?

Exercice 6

a. Considérons le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ s.c. & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_i & \geq & 0, & \forall i & \in \{1,2\} \end{array}\right.$$

On veut trouver la solution optimale par la méthode des tableaux.

▶ **Question 1 :** Déterminer le tableau du simplexe et la solution de départ.
▶ **Question 2 :** Pour chaque tableau répondre aux questions :
– Quelle est la solution de base réalisable ?

– Est-ce que la solution est optimale ?

b. Considérons le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{llclclcl} \max & 6x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & & \\ s.c. & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 120 \\ & 2x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & \leq & 200 \\ & x_i & \geq & 0, & & & \forall i & \in \{1,2,3\} \end{array}\right.$$

► **Question 1 :** Déterminer le tableau du simplexe et la solution de départ.

► **Question 2 :** Pour chaque tableau répondre aux questions :

– Quelle est la solution de base réalisable ?

– Est-ce que la solution est optimale ?