UPEC
Licences d'Informatique et de Mathématiques
Mathématiques discrètes pour l'informatique

TD 1 - Arithmétique

Exercice 1 : Nombres premiers

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, il existe un suite $(v_p(n))_{p\in\mathcal{P}}$ d'entiers naturels nuls sauf un nombre fini d'entre eux vérifiant

$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

Cette écriture s'appelle la décomposition en facteurs premiers de l'entier n.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers des entiers $10, \dots, 14$.
2. Pour tout entier naturel non nul n, prouver l'unicité de la suite $(v_p(n))_{p\in\mathcal{P}}$.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Donner la décomposition en facteurs premiers des entiers $\mathrm{pgcd}(m, n)$ et $\mathrm{ppcm}(m, n)$ en fonction de la décomposition de m et celle de n.
4. Montrer que $\mathcal{P}$ est infini.
5. Trouver un entier naturel non nul n vérifiant $n! + 1 \notin \mathcal{P}$.
6. Trouver un entier naturel non nul n vérifiant
$$1 + \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\leq n}} p \notin \mathcal{P}$$
7. Soit n est un entier naturel non nul qui n'appartient pas à $\mathcal{P}$. Établir l'existence d'un entier p vérifiant simultanément $p|n$ et $p^2 \leq n$.

Exercice 2

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k - 1$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$, et $d = \mathrm{pgcd}(a^n - 1, a^m - 1)$.

1. Soit $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m. Démontrer que $a^n \equiv a^r \pmod{a^m - 1}$.
2. En déduire que $d = \mathrm{pgcd}(a^r - 1, a^m - 1)$, puis que $d = a^{\mathrm{pgcd}(n,m)} - 1$.
3. A quelle condition $a^m - 1$ divise-t-il $a^n - 1$?

Exercice 4

1. On admet que 1999 est premier. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant simultanément $a + b = 11994$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1999$.
2. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels non nuls vérifiant $\mathrm{pgcd}(a, b) + \mathrm{ppcm}(a, b) = b + 9$.
3. Même question avec $2\,\mathrm{ppcm}(a, b) + 7\,\mathrm{pgcd}(a, b) = 111$.